

LXXI олимпиада по математике Эстонии
ШКОЛЬНЫЙ ТУР ТАЛЛИННА
Таллинн, 11 января 2024 года
XI класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Путь между двумя городами скорый поезд проезжает на 4 часа быстрее, чем товарный поезд и на 1 час быстрее, чем пассажирский поезд. Скорость товарного поезда составляет $\frac{5}{8}$ от скорости пассажирского поезда и на 50 км/ч меньше скорости скорого поезда. Найдите скорости поездов.
2. Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} x^5 \geq 25x^3 \\ \frac{(5x - x^2 - 7)(x + 7)}{x^2 - 5x - 6} < 0 \end{cases}$$
3. Пусть $f(x; y) = (1 - \cos x \cdot \cos y)^2$ и $g(x; y) = \sin^2 x \cdot \sin^2 y$.
 - а) Докажите, что неравенство $f(x; y) \geq g(x; y)$ выполняется независимо от значений действительных чисел x и y .
 - б) Упростите выражение $\sqrt{f(x; y) - g(x; y)}$.
 - в) Приведите один пример таких действительных чисел x и y , при которых выражение $\sqrt{f(x; y) - g(x; y)}$ имеет наибольшее возможное значение.
4. Величина острого угла A параллелограмма $ABCD$ равна 45 градусам. На стороне параллелограмма BC взята точка M таким образом, что $BM : MC = 2:3$, а также $MA \perp MD$. Найдите отношение длин смежных сторон параллелограмма.
5. Пошаговое движение робота-миноискателя запрограммировано в воображаемой прямоугольной системе координат из одной точки с целочисленными координатами в другую точку с целочисленными координатами вдоль координатных осей или параллельно им. В этой координатной плоскости ось Ox всегда направлена на восток, а ось Oy направлена на север. Первый шаг робот делает на восток и длина каждого его шага равна 1 единице длины в этой плоскости. Если робот попадает в некоторую точку $P(x; y)$, то он действует так:
 - если разность $x - y$ дает при делении на число 4 в остатке 0 или 1, то робот поворачивается на 90° налево и делает один шаг;
 - если разность $x - y$ дает при делении на число 4 в остатке 2 или 3, то робот поворачивается на 90° направо и делает один шаг.
 - а) В какую точку попадет робот, совершив 12 шагов, если он начинает свой первый шаг из точки $A(4; 0)$?
 - б) В направлении какой стороны света движется робот, когда он выполняет свой 51-й шаг?